はじめに

ここ数年間，京都大学の数学の入試問題は易問ばかりです．
方針も難しくないし，計算もそれ程複雑ではありません．
差がつきにくい問題ばかりで，学部によっては満点近くとらないといけないという状況にもなるでしょう．
しかしながら，そこは入試問題です．どこかでしっかりと差がつけられているのであります．
それはどこなのでしょう．

ちょっと考えれば判明しますね．

そうです．どんなに簡単な問題でも，状況を把握しているかどうか，方針や考え方が間違えていないか，調べ漏れがないか，計算が正確か，などの当たり前の事をちゃんと解答でアピールできているかどうかで差をつけられているのです．

差をつけられないように，むしろ他の受験生に差をつけるように，ちゃんとした解答を書く練習を過去問を通じてするのです．

それでは始めましょうか…

堺　義明

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

京都大学数学ⅠAⅡBⅢ対策講座

目　次

第１講　値の範囲 ―― p.4
第２講　確率 ―― p.12
第３講　数列 ―― p.20
第４講　「割り切る」問題 ―― p.26
第５講　平面図形 ―― p.36
第６講　ベクトル ―― p.46
第７講　空間図形 ―― p.56
第８講　指数対数 ―― p.64
第９講　数学Ⅱの微分積分 ―― p.72
第10講　数学Ⅲ　―その１― ―― p.80
第11講　数学Ⅲ　―その２― ―― p.88
第12講　数学Ⅲ　―その３― ―― p.96

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　値の範囲

1　実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

《12 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　次の条件(＊)を満たす正の実数の組$(a,\ b)$の範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

（＊）　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど１つある．

《12 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数の定数 a, b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

で定める．すべての実数 x で不等式

$$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$$

が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

《14 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4　a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする．このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ．

《13 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　値の範囲

1　実数 x，y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ．

《12 京大・理系》

【答】　$-8-6\sqrt{2} \leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y \leqq 3$

【解説】　$x+y=t$，$xy=u$ とおくと，x と y は α の 2 次方程式 $\alpha^2-t\alpha+u=0$ の 2 つの実数解なので，

$$(-t)^2-4u \geqq 0 \iff t^2-4u \geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

このとき，$x^2+xy+y^2=6 \iff (x+y)^2-xy=6$ より $t^2-u=6$ なので

$$u=t^2-6 \quad \cdots\cdots②$$

②を①に代入すると $t^2-4(t^2-6) \geqq 0 \iff t^2 \leqq 8 \quad \therefore \quad -2\sqrt{2} \leqq t \leqq 2\sqrt{2}$

また

$$\begin{aligned} x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y &= xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y) \\ &= ut-t^2+t \\ &= (t^2-6)t-t^2+t \\ &= t^3-t^2-5t \end{aligned}$$

より，これを $f(t)$ とおくと $f'(t)=3t^2-2t-5=(3t-5)(t+1)$ なので $f(t)$ の増減は

t	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-8-6\sqrt{2}$	↗	3	↘	$-\frac{175}{27}$	↗	$-8+6\sqrt{2}$

となる．

ここで $-\dfrac{175}{27}>-7$，$-8-6\sqrt{2}<-8$，$3-(-8+6\sqrt{2})=11-6\sqrt{2}=\sqrt{121}-\sqrt{72}>0$

より求める範囲は

$$\boldsymbol{-8-6\sqrt{2} \leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y \leqq 3}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 次の条件(＊)を満たす正の実数の組$(a,\ b)$の範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

(＊)　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど１つある．

《12 京大・文系》

【答】 略

【解説】 $a=b$ とすると，$\cos a\theta=\cos b\theta \iff \cos a\theta=\cos a\theta$ となり，これを満たす θ がちょうど１つであることに反する．

よって $a\neq b$ である．このとき

$$\cos a\theta-\cos b\theta=-2\sin\frac{a+b}{2}\theta\sin\frac{a-b}{2}\theta=0$$

であるが，$a>b$ とすると

$$0<\frac{a+b}{2}\theta\leqq\frac{a+b}{2}\pi,\ 0<\frac{a-b}{2}\theta\leqq\frac{a-b}{2}\pi,\ \frac{a+b}{2}\theta>\frac{a-b}{2}\theta$$

より求める条件は

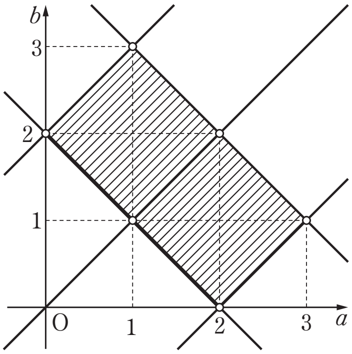
$$\frac{a-b}{2}\pi<\pi \text{ かつ } \pi\leqq\frac{a+b}{2}\pi<2\pi \iff a-b<2 \text{ かつ } 2\leqq a+b<4$$

$$\iff b>a-2 \text{ かつ } -a+2\leqq b<-a+4\ (b<a)$$

ここで，対称性より，$b>a$ のときの条件は

$$b-a<2 \text{ かつ } 2\leqq b+a<4 \iff b<a+2 \text{ かつ } -a+2\leqq b<-a+4\ (b>a)$$

以上より求める領域は



ただし，境界に関しては $b=-a+2\ (0<a<1)$ と $b=-a+2\ (1<a<2)$ を含み，$b=a$ と $b=a\pm2$ と $b=-a+4$ は含まない．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数の定数 a，b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

で定める．すべての実数 x で不等式

$$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$$

が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

《14 京大・理系》

【答】　略

【解説】

$$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2 \iff (f(x)-2)(f(x)-1)(f(x)+1)\geqq 0$$
$$\iff -1\leqq f(x)\leqq 1,\ f(x)\geqq 2$$

である．

ここですべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2$ であるとすると，$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ に注意して

$$f(x)\geqq 2 \iff \frac{ax+b}{x^2+x+1}\geqq 2$$
$$\iff 2x^2+(2-a)x+2-b\leqq 0$$

であるが，x^2 の係数が正なので，十分大きな x に対して $2x^2+(2-a)x+2-b$ が正となり不適．

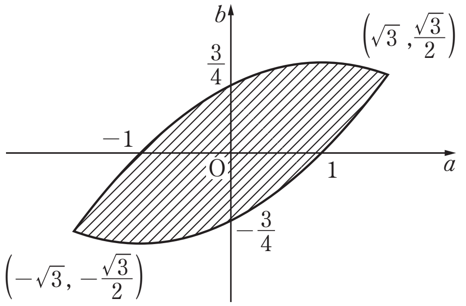
次に，すべての実数 x に対して $-1\leqq f(x)\leqq 1$ であるとすると

$$-1\leqq f(x)\leqq 1 \iff -1\leqq \frac{ax+b}{x^2+x+1}\leqq 1$$
$$\iff x^2+(a+1)x+b+1\geqq 0 \text{ かつ } x^2+(1-a)x+1-b\geqq 0$$

であるが，これがすべての x に対して成り立つ条件は

$$(a+1)^2-4(b+1)\leqq 0 \text{ かつ } (1-a)^2-4(1-b)\leqq 0$$
$$\iff b\geqq \frac{1}{4}(a+1)^2-1 \text{ かつ } b\leqq -\frac{1}{4}(a-1)^2+1$$

よって求める領域は境界を含む斜線部分．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4　a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする．このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ．

《13 京大・文系》

【答】　$2 \leqq a < 2+2\sqrt{2}$

【解説】　$a=2$ のとき，$f(x)=(x+2)^2$ より

$f(f(x))>0 \iff f(x)<-2$ または $f(x)>-2$ であるが，$f(x)=(x+2)^2 \geqq 0$ より $f(x)>-2$ がすべての実数 x について成り立つ．

$a>2$ のとき，$f(f(x))>0 \iff f(x)<-a$ または $f(x)>-2$ である．

$f(0)=2a>0$ より $f(x)<-a$ は $x=0$ について成立しないが，

$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}+1\right)^2-\frac{a^2}{4}+a-1$ より $-\frac{a^2}{4}+a-1>-2$ であれば，$f(x)>-2$ はすべての x について成り立つことになる．

$$-\frac{a^2}{4}+a-1>-2 \iff a^2-4a-4<0$$
$$\iff 2<a<2+2\sqrt{2} \quad (\because \ a>2)$$

以上より求める条件は $\boldsymbol{2 \leqq a < 2+2\sqrt{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。